Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 1^oP/2012 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios 6 - teste na quinta, 21/06

1. ex. 8.10

2. [ex. 8.11 mod] Uma partícula de massa m move-se ao longo de uma linha reta sob o potencial $V = mk/x^2$.

   a) Dadas as condições iniciais $x(0) = x_0 \neq 0, \dot{x}(0) = 0$, obtenha $x(t)$ por meio da solução em série envolvendo parênteses de Poisson sucessivos para $u = x^2$

   b) Sem fazer contas, baseado apenas no resultado do item (a), explique o que aconteceria se você tentasse usar diretamente os parênteses de Poisson para $u = x$.

3. [ex. 8.12 mod] O resultado do exercício anterior é um caso particular de uma classe de Hamiltonianos que pode ser resolvida exatamente, da forma

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2f(qp)^2}$$

   onde $f : R \to R$ é uma função diferenciável que nunca se anula.

   a) Prove que a transformação

$$Q = qf(qp); \quad P = \frac{p}{f(qp)}$$

   é canônica. Com sua ajuda, prove que a solução geral das equações de Hamilton para este Hamiltoniano é:

$$q(t) = \frac{\alpha t + \beta}{f(\alpha^2 t + \alpha\beta)}, \quad p = \alpha f(\alpha^2 t + \alpha\beta)$$

   b) Mostre que com uma escolha adequada da função f obtém-se a Hamiltoniana do ex. anterior, e obtenha $q(t)$ e $p(t)$. Compare sua expressão para $q(t)$ com a do exercício anterior, assumindo as mesmas condições iniciais.

   Obs: a função f procurada acima se anula para $q = 0$, mas isso não invalida o resultado do item (a) já que, para o potencial do ex. 8.11, o ponto $q = 0$ nunca é alcançado.

4. [ex. 8.14 mod]. Considere a transformação $(\bar{Q}, \bar{P}) \to (Q, P)$ definida por

$$Q = \frac{\bar{P}}{m\Omega} \operatorname{sen}\left(\frac{m\Omega\bar{Q}}{\bar{P}}\right) \quad , \quad P = \bar{P}\cos\left(\frac{m\Omega\bar{Q}}{\bar{P}}\right).$$

   a) Mostre que ela é canônica, e que reduz a Hamiltoniana de um oscilador harmônico de frequência angular Ω nas coordenadas Q, P a uma partícula livre nas coordenadas $(\bar{Q}, \bar{P})$. Use então a solução da partícula livre para resolver o problema original.

   b) Fazendo as modificações apropriadas na definição da transformação canônica, resolva de forma análoga o problema de um 'oscilador' com constante de mola negativa (i.e., $V = m\Omega^2 Q^2/2$ mas com $\Omega^2 < 0$).

5. [ex. 8.14 mod] - cont

   a) Encontre a Hamiltoniana associada à Lagrangiana $L = e^{\lambda t}(m\dot{q}^2/2 - m\omega^2 q^2/2)$, que descreve um oscilador harmônico amortecido.

   b) Prove que a transformação $Q = qe^{\lambda t}/2, P = pe^{-\lambda t/2} + \frac{m\lambda}{2} qe^{\lambda t/2}$ é canônica e obtenha uma função geradora.

   c) Calcule a nova Hamiltoniana em função de Q, P, e do parâmetro $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2/4}$. Interprete-a fisicamente nos três casos de amortecimento fraco ($\lambda/2 < \omega$), crítico ($\lambda/2 = \omega$), e forte ($\lambda/2 > \omega$), do problema original.

   d) Para os três casos acima, use as soluções das eqs. de movimento para Q e P, obtidas no problema (4), para obter as soluções correspondentes nas variáveis originais $q(t), p(t)$.

6. [ex. 9.1 mod] Considere mais uma vez o problema do ex. (1) acima, $V(x) = mk/x^2$, com $k > 0$, e novamente $x(0) \neq 0, \dot{x}(0) = 0$. Determine a solução $x(t)$ resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi e compare com as obtidas nos exs. (1) e (2). Qual método você prefere?

   Dado útil: $\int \sqrt{a - b/x^2}dx = \mathrm{sgn}(x)\left(\sqrt{ax^2 - b} + \sqrt{b}\arctan\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ax^2-b}}\right)\right)$

7. [ex. 9.6 mod] Uma partícula de carga e se move no plano (x, y) na presença de um campo magnético constante perpendicular ao plano.

   a) Verifique que esse campo pode ser igualmente descrito pelos potenciais vetores $\vec{A}_1 = xB\hat{y}$ ou $\vec{A}_2 = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ (diferentes calibres).

   b) Usando $\vec{A}_1$ na eq. 7.1.20 do livro, escreva a Hamiltoniana deste sistema, e em seguida a equação de Hamilton-Jacobi. Note que, como uma das variáveis é cíclica, a eq. é separável e resolva-a, obtendo a solução $x(t), y(t), p_x(t), p_y(t)$.

   c) Usando agora $\vec{A}_2$, constate que a eq. de HJ não é mais separável se procuramos $W(x, y)$ na forma $X(x) + Y(y)$. Isso mostra que a sua separabilidade depende não apenas das coordenadas, mas também do calibre em que ela é escrita. Verifique porém que a separabilidade pode ser reobtida se supormos W da forma $W(x, y) = Cxy + \alpha_y y + X(x)$, onde α_y é uma constante arbitrária (constante de integração), e C é uma constante que deve ser escolhida de forma conveniente.

   d) Mostre que, com a escolha correta de C, $x(t)$ e $y(t)$ satisfazem às mesmas eqs. obtidas no item anterior, portanto têm as mesmas soluções. Já $p_x(t)$ e $p_y(t)$ são diferentes. Explique por que isso acontece.

   Integrais úteis: $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -\sqrt{a + bx - x^2} - \frac{b}{2}\tan^{-1}\left(\frac{b-2x}{2\sqrt{a+bx-x^2}}\right)$

8. [ex. 9.9 mod] Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo x sujeita ao potencial $V(x) = V_0/\cos^2(x/l), V_0 > 0, l > 0$.

   a) Analise qualitativamente as características deste potencial e esboçe o gráfico para $x \in (-l\pi/2, l\pi/2)$. Verifique que para qualquer valor de enegia total $E > V_0$ a partícula executa um movimento periódico, e identifique a amplitude (pontos-limite, em módulo) deste movimento.

   b) Use o método das variáveis de ação-ângulo para encontrar o período τ da oscilação em função da energia.

9. [ex. 9.11 mod] O movimento de uma partícula num plano é determinado pela hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_x^2 + p_y^2}{x^2 + y^2} + \frac{k}{x^2 + y^2},$$

   onde (x, y) são coordenadas cartesianas e $k > 0$.

   a) Use a eq. de Hamilton-Jacobi para obter a equação $y(x)$ que define a trajetória da partícula

   b) Verifique se essa órbita é uma seção de cônica (elipse, parábola ou hipérbole) [i.e., se satisfaz uma eq. da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$]